

Systèmes dynamiques/Dynamical systems
Équations différentielles/Ordinary Differential Equations

La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps

Tsygvintsev Alexei

Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, C.N.R.S.– UMR 5580, Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cédex 4, France
Courriel : tsygvint@picard.ups-tlse.fr

et Section de Mathématiques, Université de Genève, 2-4, rue du Lièvre, Case postale 240,
CH-1211 Genève 24, Suisse
Courriel : Alexei.Tsygvintsev@math.unige.ch

Résumé. Nous considérons le problème des trois corps dans le plan et montrons que ce problème ne possède pas de système complet d'intégrales premières méromorphes à un voisinage de la solution particulière de Lagrange.

The meromorphic non-integrability of the planar three-body problem

Abstract. We study the planar three-body problem and prove the absence of a complete set of complex meromorphic first integrals in a neighborhood of the Lagrangian solution.

1. Introduction et résultats

Considérons trois corps P_1, P_2, P_3 sur le plan avec des masses m_1, m_2, m_3 qui s'attirent conformément à la loi de Newton. Soient (x_1, x_2) les coordonnées de P_1 , (x_3, x_4) les coordonnées de P_2 , (x_5, x_6) les coordonnées de P_3 . Notons $y_r = m_k \frac{dx_r}{dt}$ où k est la partie entière de $(r+1)/2$.

Les équations de Hamilton du mouvement des corps prennent la forme

$$\frac{dx_r}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_r}, \quad \frac{dy_r}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.1)$$

avec l'Hamiltonien

$$H_1 = \frac{1}{2m_1}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2m_2}(y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{2m_3}(y_5^2 + y_6^2) - m_3m_2\{(x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2\}^{-1/2} \\ - m_3m_1\{(x_5 - x_1)^2 + (x_6 - x_2)^2\}^{-1/2} - m_1m_2\{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2\}^{-1/2}.$$

Ce problème peut être illustré par l'attraction mutuelle de la terre, de la lune et du soleil.

Les intégrales premières connues du système (1.1) sont

$F_1 = H_1$ – l'énergie,

$F_2 = y_1 + y_3 + y_5, F_3 = y_2 + y_4 + y_6$ – les intégrales du mouvement du centre de gravité,

$F_4 = y_1x_2 + y_3x_4 + y_5x_6 - x_1y_2 - x_3y_4 - x_5y_6 = k$ – l'intégrale des aires.

En supposant que le centre de gravité est fixe, c'est-à-dire que $F_2 = F_3 = 0$, et en utilisant l'intégrale des aires F_4 , le système (1.1) peut être ramené à 3 degrés de liberté [6]

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

où

$$H = \frac{M_1}{2} \left\{ p_1^2 + \frac{1}{q_1^2} P^2 \right\} + \frac{M_2}{2} (p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{m_3} \left\{ p_1 p_2 - \frac{p_3}{q_1} P \right\} - \frac{m_1 m_3}{r_1} - \frac{m_3 m_2}{r_2} - \frac{m_1 m_2}{r_3}, \\ P = p_3 q_2 - p_2 q_3 - k,$$

et

$$r_1 = q_1, \quad r_2 = \sqrt{q_2^2 + q_3^2}, \quad r_3 = \sqrt{(q_1 - q_2)^2 + q_3^2},$$

sont les distances mutuelles des corps.

Nous appellerons le système (1.2) le *problème plan des trois corps*.

D'après Bruns [1] le problème (1.1) et donc le problème (1.2) n'admet pas d'intégrale première algébrique, autre que les intégrales premières déjà connues.

Poincaré [4] a démontré en 1892 que si la troisième masse $m_3 = \mu$ est infiniment petite et est attirée par les deux premières masses m_1 et m_2 , alors le problème (1.2) n'admet pas d'intégrale première holomorphe en μ autre que celle de l'énergie.

Il est bien connu (Lagrange [2]) que ce problème possède une solution particulière dans laquelle les trois corps forment un triangle équilatéral et décrivent chacun une conique. Notons Γ celle qui correspond au cas parabolique.

Nous considérons dans cette Note la question de l'existence de deux intégrales premières supplémentaires méromorphes et fonctionnellement indépendantes autres que celle de l'énergie au voisinage de la solution Γ .

Notre résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 1.1– Le problème plan des trois corps n'admet pas deux intégrales premières supplémentaires méromorphes par rapport aux variables q_i, p_j, r_k et fonctionnellement indépendantes au voisinage de la solution particulière de Lagrange Γ .

COROLLAIRE 1.2– Le problème plan des trois corps n'est pas complètement méromorphiquement intégrable au voisinage de la solution Γ .

La preuve est basée sur la théorie de Ziglin [7] qui donne une condition nécessaire de non-intégrabilité.

Dans le cas de masses égales, le même résultat a été obtenu par D. Boucher à l'aide du théorème de non-intégrabilité de Moralis-Ramis [3].

2. Les équations normales variationnelles le long de la solution Γ

Dans le cas parabolique la solution de Lagrange peut être écrite sous la forme suivante

$$(q_1, q_2, q_3) = (q, \frac{q}{2}, \frac{\sqrt{3}q}{2}), \quad (p_1, p_2, p_3) = (p, \alpha p + \frac{\beta}{q}, \gamma p + \frac{\delta}{q}),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les constantes.

Pour $q(t), p(t)$ on a

$$q = P(w), \quad p = \frac{w}{P(w)}, \quad P(w) = e_1 w^2 + e_2 w + e_3,$$

avec les constantes e_1, e_2, e_3 .

Nous avons donc la paramétrisation de la solution de Lagrange

$$\Gamma = \{q_i(w), p_i(w) \mid w \in \mathbf{CP}^1\}.$$

A partir de cette solution particulière, on peut calculer les *équations normales variationnelles* (voir [5]) qui prennent la forme d'un système fuchsien

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{A}{\tau - \tau_0} + \frac{B}{\tau - \tau_1} + \frac{C}{\tau - \tau_2} \right) x, \quad x \in \mathbf{C}^4, \quad (2.1)$$

où $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{C}$ sont les singularités et A, B, C sont les 4×4 matrices constantes dépendantes sur des masses m_1, m_2, m_3 .

3. Le groupe de monodromie des équations (2.1)

Soit G le groupe de monodromie des équations (2.1).

Nous désignons $T_i, T_\infty, i = 0, 1, 2$ les générateurs de G correspondants respectivement aux groupes de monodromie locaux autour les singularités $\tau_i, i = 0, 1, 2$ et $\tau = \infty$.

LEMME 3.1

- a) $T_0 = I$ – est l'élément neutre de G .
- b) Les générateurs T_1, T_2 ont la même forme de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Le générateur T_∞ a les valeurs propres suivantes

$$\text{Spectre}(T_\infty) = \left\{ e^{2\pi i \lambda_1}, \quad e^{2\pi i \lambda_2}, \quad e^{-2\pi i \lambda_1}, \quad e^{-2\pi i \lambda_2} \right\},$$

où

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13 + \sqrt{\theta}}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13 - \sqrt{\theta}},$$

et

$$\theta = 144 \left(1 - 3 \frac{S_2}{S_1^2} \right), \quad S_1 = m_1 + m_2 + m_3, \quad S_2 = m_1 m_2 + m_3 m_2 + m_1 m_3.$$

COROLLAIRE 3.2

$$T_1 T_2 = T_\infty^{-1}.$$

COROLLAIRE 3.3– On aura toujours

$$\text{Spectre}(T_\infty) \neq \{1, 1, 1, 1\}.$$

Esquisse de démonstration.– Pour tout les singularités $\tau_i, \tau = \infty, i = 0, 1, 2$ on peut calculer des solution formelles locales du système (2.1) et trouver donc les générateurs de G dans chaque point singulier.

4. Esquisse de la démonstration du théorème 1.1

Notre démonstration est inspirée par Ziglin [7]. Supposons que le problème plan des trois corps (1.2) possède deux intégrales premières supplémentaires méromorphes par rapport aux variables q_i, p_j, r_k et fonctionnellement indépendantes au voisinage de la solution particulière de Lagrange Γ . Nous en déduisons le lemme suivant

LEMME 4.1 (Ziglin [7])–Le groupe de monodromie G des équations normales variationnelles (2.1) a deux invariants rationnels et fonctionnellement indépendantes $J_1(x)$, $J_2(x)$.

En vertu du lemme 3.1 on peut supposer sans perte de généralité que

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + D,$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On aura pour la matrice T_2

$$T_2 = I + R,$$

où

$$R = V^{-1}DV = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

avec une matrice V , $\det(V) \neq 0$ et les constantes inconnues $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{C}$.

Remarque 4.2. La matrice étant nilpotente,

$$\text{Spectre}(R) = \{0, 0, 0, 0\}. \quad (4.1)$$

LEMME 4.3– Soit J l’invariant rationnel de G , alors

$$\delta J = 0, \quad \Delta J = 0,$$

$$\text{où } \delta = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \Delta = \left(\sum_{i=1}^4 a_i x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\sum_{i=1}^4 b_i x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\sum_{i=1}^4 c_i x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(\sum_{i=1}^4 d_i x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Démonstration du lemme 4.3.– Pour un arbitraire $n \in \mathbf{N}$ nous avons $T_1^n = I + nD$. Par conséquent

$$J(T_1^n x) = J(x + nDx) = J(x) + n\delta J(x) + \sum_{i=2}^{\infty} n^i r_i(x) = J(x),$$

Il résulte de là que $\delta J = 0$. La preuve de l’identité $\Delta J = 0$ s’effectue de la même manière.

□

On obtient donc

$$\delta J_i = \Delta J_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ces équations nous permettent de trouver les restrictions sur les paramètres a_i, b_i, c_i, d_i qui s’écrivent sous la forme d’un système d’équations algébriques

$$\begin{aligned} P_1(a, b, c, d) &= 0, \\ &\vdots \\ P_m(a, b, c, d) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

avec les polynômes $P_1 \dots P_m$, $m \in \mathbf{N}$.

Par ailleurs, la condition 4.1 nous donne un autre système d'équations sur les mêmes paramètres

$$\begin{aligned} L_1(a, b, c, d) &= 0, \\ &\vdots \\ L_n(a, b, c, d) &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

avec les polynômes $L_1 \dots L_n$, $n \in \mathbf{N}$.

On peut vérifier par un calcul direct, que pour a_i , b_i , c_i , d_i satisfaisant aux systèmes (4.2) et (4.3) on aura toujours

$$\text{Spectr}(T_1 T_2) = \{1, 1, 1, 1\},$$

d'où, en utilisant le corollaire 3.2

$$\text{Spectr}(T_\infty) = \{1, 1, 1, 1\}.$$

Or cela est contraire au corollaire 3.3. Ceci achève la démonstration du théorème 1.1.

Remerciements

Je remercie L. Gavrilov and V. Kozlov pour m'avoir proposé le sujet de ce travail et ses suggestions. Je veux également remercier J.-P. Ramis, J.-A. Weil et D. Bucher pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Références bibliographiques

- [1] H. Bruns, *Ueber die Integrale des vierkörper Problems*, Acta Math. 11, p. 25-96, 1887.
- [2] J.L. Lagrange, *Oeuvres*. Vol. 6, 272-292, Paris, 1873.
- [3] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, *Galosian Obstructions to integrability of Hamiltonian Systems*, Preprint, 1998.
- [4] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 1, chap. 5, Paris, 1892.
- [5] A. Tsygvintsev, *On the variational equations of three-body problem near Lagrangian solutions*, Prépublication 150 du Laboratoire de Mathématiques E. Picard, Université Toulouse III, 1999.
- [6] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, New York, 1970.
- [7] S.L. Ziglin, *Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian Mechanics I*, Func. Anal. Appl. 16, 1982.